Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}dx \tag{1}$$

Nejprve si upravíme jmenovatele zlomku:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{3x^2}{2}}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3x^2}{2}}}dx$$

A použijeme substituci $a = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ resp. $da = \sqrt{\frac{3}{2}}dx$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3x^2}{2}}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}da$$

Použijeme známý vzorec pro integrál $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-a}}da = \frac{\arcsin a}{\sqrt{3}} + c$$

A resubstituujeme:

$$\frac{\arcsin a}{\sqrt{3}} + c = \frac{\arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{3}} + c \wedge x \in \mathbb{R} \wedge -\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\int |e^x \sin x| dx \tag{2}$$

Absolutní hodnotu si rozdělíme na dva případy, kde $x \in \langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$ a $x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$. Použijeme metodu per partes ($u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin x$):

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx + c$$

Metodu per partes zopakujeme ($u(x) = e^x$, $v'(x) = \cos x$):

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx + c$$

A přičteme integrál k oběma stranám a vydělíme 2:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c \wedge x \in \langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle \text{ , } x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$$

$$\int \ln^n(x)dx; \text{ kde } n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Použijeme metodu per partes ($u = \ln^n(x)$,$v' = 1$):

$$\int \ln^n(x)dx = x\ln^n(x) + \int x\frac{1}{x}n\ln^{n-1}(x)dx + c = x\ln^n(x) + n\int \ln^{n-1}(x)dx + c$$

Toto se bude opakovat ještě $(n-2)\times$. Výsledkem pak bude součet:

$$x\ln^n(x) + (n)(x\ln^{n-1}(x) + (n-1)(x\ln^{n-2}(x) + \cdots + (2)(x(\ln(x)-1))\ldots)) + c \wedge x \in (0,\infty)$$